第 37 講　解と係数の関係

37　次の各問いに答えよ．

(1)　方程式 $x^2+bx+c=0$ の 2 解を α，β とする．定数 b，c と α，β の関係式を求めよ．

(2)　方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 解を α，β，γ とする．定数 b，c，d と α，β，γ の関係式を求めよ．

(3)　方程式 $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の 4 解を α，β，γ，δ とする．定数 b，c，d，e と α，β，γ，δ の関係式を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　解と係数の関係

37　$a+b+c=0$ のとき

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

が成立することを示せ.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　解と係数の関係

37　次の各問いに答えよ．

(1)　方程式 $x^2+bx+c=0$ の 2 解を α, β とする．定数 b, c と α, β の関係式を求めよ．

(2)　方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 解を α, β, γ とする．定数 b, c, d と α, β, γ の関係式を求めよ．

(3)　方程式 $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の 4 解を α, β, γ, δ とする．定数 b, c, d, e と α, β, γ, δ の関係式を求めよ．

【答】 (1) $\begin{cases}\alpha+\beta=-b\\ \alpha\beta=c\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-b\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=c\\ \alpha\beta\gamma=-d\end{cases}$ (3) $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=-b\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=c\\ \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-d\\ \alpha\beta\gamma\delta=e\end{cases}$

【解答】

(1)　$x^2+bx+c=0$ の 2 解が α, β より，この方程式は $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ と因数分解される．

ここで，$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ となり，これが x^2+bx+c と恒等的に等しいので

$$-(\alpha+\beta)=b \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta=c$$

つまり $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha+\beta=-b}\\ \boldsymbol{\alpha\beta=c}\end{cases}$ を得る．

(2)　$x^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 解が α, β, γ より，この方程式は $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ と因数分解される．

ここで，$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$ となり，これが x^3+bx^2+cx+d と恒等的に等しいので

$$-(\alpha+\beta+\gamma)=b \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=c \quad \text{かつ} \quad -\alpha\beta\gamma=d$$

つまり $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=-b}\\ \boldsymbol{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=c}\\ \boldsymbol{\alpha\beta\gamma=-d}\end{cases}$ を得る．

(3)　$x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の 4 解が α, β, γ, δ より，

この方程式は $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=0$ と因数分解される．

ここで

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$

$=x^4-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)x^2-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)x+\alpha\beta\gamma\delta$

となり，これが $x^4+bx^3+cx^2+dx+e$ と恒等的に等しいので

$$-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=b \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=c$$
$$\text{かつ} \quad -(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)=d \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta\gamma\delta=e$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

つまり $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=-b \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=c \\ \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-d \\ \alpha\beta\gamma\delta=e \end{cases}$ を得る.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　解と係数の関係

37　$a+b+c=0$ のとき

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

が成立することを示せ.

【答】 略

【解答】

p，q を定数として

$$\begin{cases} ab+bc+ca=p \\ abc=q \end{cases}$$

とおくと $a+b+c=0$ より，a，b，c は方程式

$$t^3+pt-q=0$$

の 3 解である．よって

$$a^3+pa-q=0 \qquad \therefore\ a^3=-pa+q$$

となる．同様に

$$b^3=-pb+q,\quad c^3=-pc+q$$

を得るので

$$a^3+b^3+c^3=-p(a+b+c)+3q=3q$$

また $a^5=a^3\cdot a^2=-pa^3+qa^2$ より

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\ &=-2p \end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned} a^5+b^5+c^5&=-p(a^3+b^3+c^3)+q(a^2+b^2+c^2)\\ &=-p\times3q+q\times(-2p)\\ &=-5pq \end{aligned}$$

このとき

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

$$=\frac{-5pq}{5}-\frac{-2p}{2}\cdot\frac{3q}{3}=0$$

よって，与式は示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。